

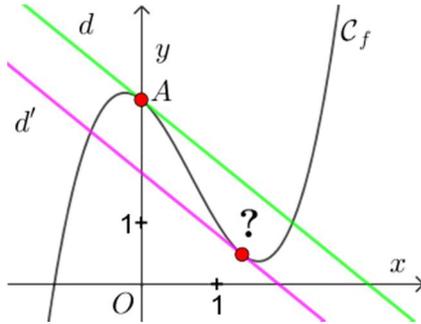
Défis 1^{ère} Spé maths : dérivation

– Thiaude P.

Défi Dérivation 01

Pour tout réel x on pose $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 3$, on note A le point de \mathcal{C}_f d'abscisse nulle et d la tangente à \mathcal{C}_f en A .

Déterminer les coordonnées du point de \mathcal{C}_f distinct de A en lequel la tangente d' à \mathcal{C}_f est parallèle à la tangente d .



Corrigé

Soit $a \in \mathbb{R}$.

D'une part, pour tout $h \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(a+h) &= (a+h)^3 - 2(a+h)^2 - (a+h) + 3 \\ &= a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - 2(a^2 + 2ah + h^2) - a - h - 3 \\ &= a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - 2a^2 - 4ah - 2h^2 - a - h - 3 \\ &= h^3 + h^2(3a-2) + h(3a^2-4a-1) + a^3 - 2a^2 - a - 3 \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$f(a) = a^3 - 2a^2 - a + 3$$

donc :

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{h^3 + h^2(3a-2) + h(3a^2-4a-1)}{h} \\ &= \frac{h(h^2 + h(3a-2) + 3a^2 - 4a - 1)}{h} \\ &= h^2 + h(3a-2) + 3a^2 - 4a - 1 \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} [h^2 + h(3a-2) + 3a^2 - 4a - 1] \\ &= 3a^2 - 4a - 1 \end{aligned}$$

On en déduit que $f'(0) = 3(0)^2 - 4(0) - 1 = -1$: la tangente d a donc pour coefficient directeur (-1) .

On sait que $d' \parallel d$ et que le coefficient directeur de d est (-1) .

Or, deux droites non verticales sont parallèles lorsqu'elles ont même coefficient directeur, donc le coefficient directeur de d' est aussi (-1) .

Il s'agit donc de déterminer $x_B \neq 0$ ($x_A = 0$) tel que $f'(x_B) = -1$, x_B est la solution non nulle de l'équation $f'(x) = -1$.

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} f'(x) = -1 &\Leftrightarrow 3x^2 - 4x - 1 = -1 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(3x - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

La solution non nulle de $f'(x) = -1$ est $\frac{4}{3}$ donc $x_B = \frac{4}{3}$.

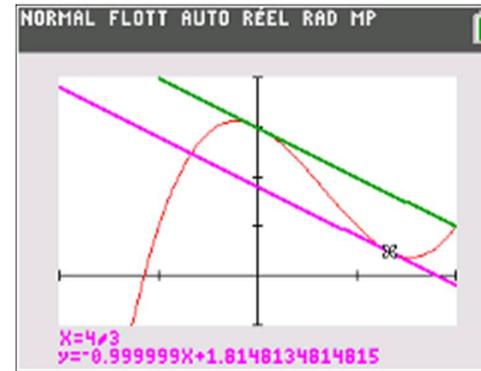
Or, $B \in \mathcal{C}_f$ donc $y_B = f(x_B)$, d'où :

$$y_B = f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} + 3 = \frac{13}{27}$$

Finalement :

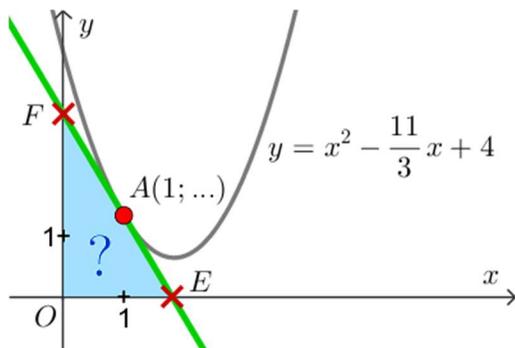
$$B\left(\frac{4}{3}; \frac{13}{27}\right)$$

Vérification à la calculatrice



Défi Dérivation 02

Dans un repère orthonormé du plan, d'origine O , la tangente à la parabole d'équation $y = x^2 - \frac{11}{3}x + 4$ au point A d'abscisse $x_A = 1$ coupe l'axe des abscisses en E et l'axe des ordonnées en F :



Quelle est l'aire du triangle rectangle OEF ?

Corrigé

Pour tout réel x on pose : $f(x) = x^2 - \frac{11}{3}x + 4$.

La tangente T_A à la parabole représentative de f au point A d'abscisse 1 admet pour équation : $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$. On a, pour tout réel h :

$$\begin{aligned} f(1+h) &= (1+h)^2 - \frac{11}{3}(1+h) + 4 = 1 + 2h + h^2 - \frac{11}{3} - \frac{11}{3}h + 4 \\ &= h^2 + \left(2 - \frac{11}{3}\right)h + 5 = h^2 - \frac{5}{3}h + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

et :

$$f(1) = 1^2 - \frac{11}{3}(1) + 4 = 5 - \frac{11}{3} = \frac{4}{3}$$

donc, pour tout $h \neq 0$:

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{h^2 - \frac{5}{3}h + \frac{4}{3} - \frac{4}{3}}{h} = \frac{h(h - \frac{5}{3})}{h} = h - \frac{5}{3}$$

On a :

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(h - \frac{5}{3}\right) = -\frac{5}{3}$$

La tangente T_A admet donc pour équation :

$$\begin{aligned} y &= -\frac{5}{3}(x-1) + \frac{4}{3} \\ y &= -\frac{5}{3}x + \frac{5}{3} + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= -\frac{5}{3}x + \frac{9}{3} \\ y &= -\frac{5}{3}x + 3 \end{aligned}$$

Pour $y = 0$ on obtient :

$$0 = -\frac{5}{3}x + 3 \Leftrightarrow \frac{5}{3}x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{9}{5}$$

donc : $E\left(\frac{9}{5}; 0\right)$.

Pour $x = 0$ on obtient :

$$y = -\frac{5}{3}(0) + 3 = 3$$

donc : $F(0; 3)$.

On a donc : $OE = \frac{9}{5}$ et $OF = 3$.

Or,

$$\mathcal{A}_{OEF} = \frac{1}{2} \times OE \times OF$$

donc :

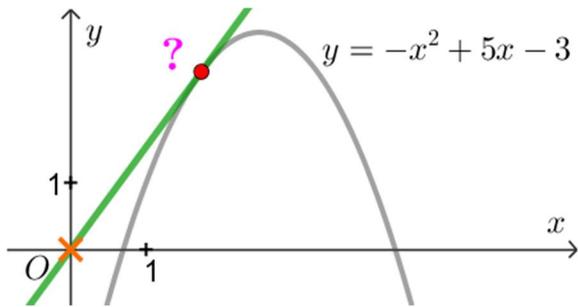
$$\mathcal{A}_{OEF} = \frac{1}{2} \times \frac{9}{5} \times 3 = \frac{27}{10}$$

Conclusion

Le triangle rectangle OEF a une aire égale à $\frac{27}{10}$.

Défi Dérivation 03

Dans un repère orthogonal du plan on considère la parabole d'équation $y = -x^2 + 5x - 3$; déterminer les coordonnées du ou des point(s) de cette parabole en lequel (lesquels) la tangente passe par l'origine du repère :



Corrigé

Pour tout réel x on pose $f(x) = -x^2 + 5x - 3$.

Soit $a \in \mathbb{R}$, la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse a admet pour équation :

$$\begin{aligned}y &= f'(a)(x - a) + f(a) \\ \Leftrightarrow y &= f'(a)x - af'(a) + f(a)\end{aligned}$$

Donc l'ordonnée à l'origine de cette tangente est : $f(a) - af'(a)$.

Or, une droite non verticale passe par l'origine du repère si et seulement si son ordonnée à l'origine est nulle.

Il s'agit donc de trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) - af'(a) = 0$ autrement dit il s'agit de résoudre l'équation $f(x) - xf'(x) = 0$ (*).

Or, pour tout réel $x, f'(x) = -2x + 5$ donc l'équation (*) s'écrit :

$$\begin{aligned}-x^2 + 5x - 3 - x(-2x + 5) &= 0 \\ \Leftrightarrow -x^2 + 5x - 3 + 2x^2 - 5x &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - (\sqrt{3})^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) &= 0 \\ \Leftrightarrow x + \sqrt{3} = 0 \text{ ou } x - \sqrt{3} &= 0 \\ \Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \text{ ou } x = \sqrt{3}\end{aligned}$$

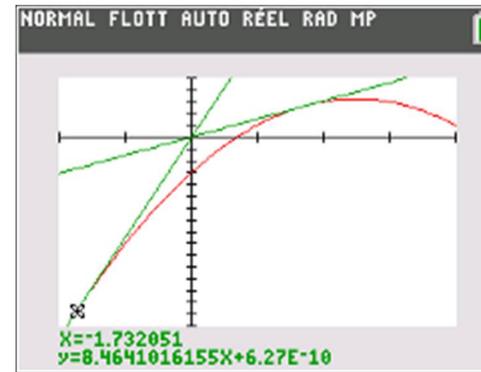
Or :

$$f(-\sqrt{3}) = -(-\sqrt{3})^2 + 5(-\sqrt{3}) - 3 = -3 - 5\sqrt{3} - 3 = -6 - 5\sqrt{3}$$

$$f(\sqrt{3}) = -(\sqrt{3})^2 + 5(\sqrt{3}) - 3 = -3 + 5\sqrt{3} - 3 = -6 + 5\sqrt{3}$$

Deux points répondent à la question : $A(\sqrt{3}; -6 + 5\sqrt{3})$ et $B(-\sqrt{3}; -6 - 5\sqrt{3})$.

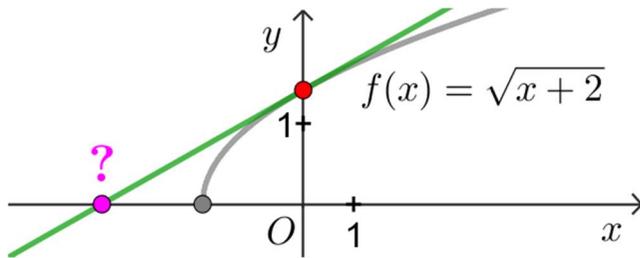
Vérification



Défi Dérivation 04

Pour tout $x \in [-2; +\infty[$ on pose : $f(x) = \sqrt{x+2}$.

La tangente au point d'abscisse nulle de \mathcal{C}_f coupe l'axe des abscisse en un certain point : quelles sont les coordonnées de ce point ?



Pour tout h tel que $0+h \in \mathcal{D}_f$, c'est-à-dire $h \in [-2; +\infty[$, on a :

$$f(0+h) = f(h) = \sqrt{h+2}$$

$$\text{D'autre part : } f(0) = \sqrt{0+2} = \sqrt{2}$$

Donc pour tout $h \in \mathcal{D}_f$ tel que $h \neq 0$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \frac{\sqrt{h+2} - \sqrt{2}}{h} = \frac{(\sqrt{h+2} - \sqrt{2})(\sqrt{h+2} + \sqrt{2})}{h(\sqrt{h+2} + \sqrt{2})} \\ &= \frac{(\sqrt{h+2})^2 - (\sqrt{2})^2}{h(\sqrt{h+2} + \sqrt{2})} = \frac{h+2-2}{h(\sqrt{h+2} + \sqrt{2})} = \frac{h \times 1}{h \times (\sqrt{h+2} + \sqrt{2})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{h+2} + \sqrt{2}} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{1}{\sqrt{h+2} + \sqrt{2}}$$

On a :

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h+2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{2(\sqrt{2})^2}$$

$$f'(0) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

La tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse nulle admet pour équation :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

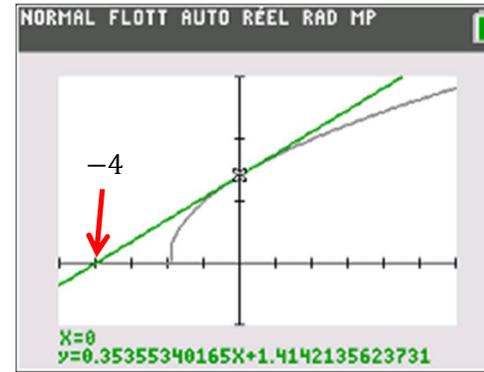
$$y = \frac{\sqrt{2}}{4}x + \sqrt{2}$$

Cette droite coupe l'axe des abscisse lorsque $y = 0$, donc il s'agit de résoudre

$$\frac{\sqrt{2}}{4}x + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{4}x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \frac{-\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{4}} \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \times \frac{4}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = -4$$

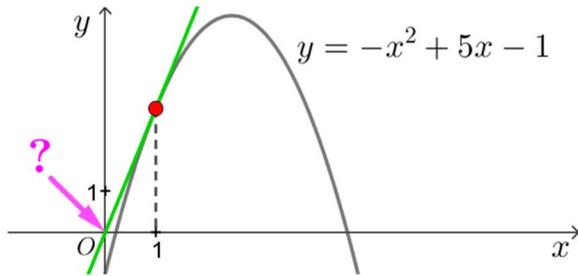
La courbe représentative de f coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(-4; 0)$.

Vérification



Défi Dérivation 05

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose : $f(x) = -x^2 + 5x - 1$. La tangente au point d'abscisse 1 de \mathcal{C}_f passe-t-elle par l'origine du repère ?



Corrigé

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 5x - 1$$

Pour tout $h \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(1+h) &= -(1+h)^2 + 5(1+h) - 1 = -(1+2h+h^2) + 5 + 5h - 1 \\ &= -1 - 2h - h^2 + 5 + 5h - 1 = -h^2 + 3h + 3 \end{aligned}$$

$$f(1) = -(1)^2 + 5(1) - 1 = -1 + 5 - 1 = 3$$

Pour tout $h \neq 0$:

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{-h^2 + 3h + 3 - 3}{h} = \frac{-h^2 + 3h}{h} = \frac{h(-h + 3)}{h} = -h + 3$$

On a :

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-h + 3) = 3$$

La tangente d au point d'abscisse 1 admet pour équation :

$$\begin{aligned} y &= f'(1)(x - 1) + f(1) \\ y &= 3(x - 1) + 3 \\ y &= 3x - 3 + 3 \\ y &= 3x \end{aligned}$$

La tangente d admet pour équation réduite $y = 3x$, son coefficient directeur est nul donc elle passe par l'origine du repère.

Conclusion

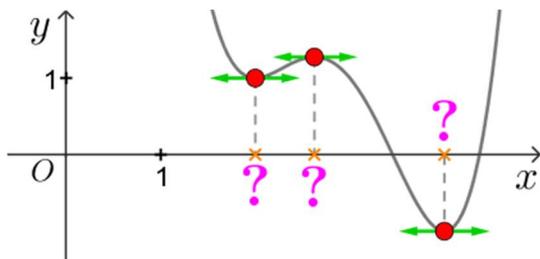
La tangente au point d'abscisse 1 de \mathcal{C}_f passe par l'origine du repère.

Défi Dérivation 06 (utilise $f'(x)$)

Pour tout réel x on pose :

$$f(x) = (x - 2)^2(x - 3) \left(x - \frac{9}{2}\right) + 1$$

On munit le plan d'un repère orthogonal ; déterminer les abscisses des points en lesquels \mathcal{C}_f admet une tangente horizontale :

**Corrigé**

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x - 2)^2(x - 3) \left(x - \frac{9}{2}\right) + 1$$

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = (x - 2)^2 \times \left(x^2 - \frac{9}{2}x - 3x + \frac{27}{2}\right) + 1$$

$$f(x) = (x - 2)^2 \times \left(x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{27}{2}\right)$$

Rappel

$$(u^2)' = 2u \times u' \text{ et } (u \times v)' = u' \times v + v' \times u$$

Donc :

$$f'(x) = 2(x - 2) \times \left(x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{27}{2}\right) + \left(2x - \frac{15}{2}\right)(x - 2) + 0$$

$$f'(x) = (x - 2) \left(2 \left(x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{27}{2}\right) + \left(2x - \frac{15}{2}\right)(x - 2)\right)$$

$$f'(x) = (x - 2) \left(2x^2 - 15x + 27 + 2x^2 - 4x - \frac{15}{2}x + 15\right)$$

$$f'(x) = (x - 2) \left(4x^2 - \frac{53}{2}x + 42\right)$$

Il y a une tangente horizontale pour \mathcal{C}_f lorsque $f'(x) = 0$

C'est-à-dire lorsque :

$$x - 2 = 0 \text{ ou } 4x^2 - \frac{53}{2}x + 42 = 0$$

$$\bullet x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$\bullet 4x^2 - \frac{53}{2}x + 42$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 4$, $b = -\frac{53}{2}$ et $c = 42$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-\frac{53}{2}\right)^2 - 4(4)(42) = \frac{121}{4} = \left(\frac{11}{2}\right)^2$$

$\Delta > 0$ donc il y a deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+\frac{53}{2} - \frac{11}{2}}{2(4)} = \frac{21}{8}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+\frac{53}{2} + \frac{11}{2}}{2(4)} = \frac{32}{8} = 4$$

Conclusion

Il y a trois points exactement en lesquels la tangente est horizontale et ils ont respectivement pour abscisse : 2 , $\frac{21}{8}$ et 4 .

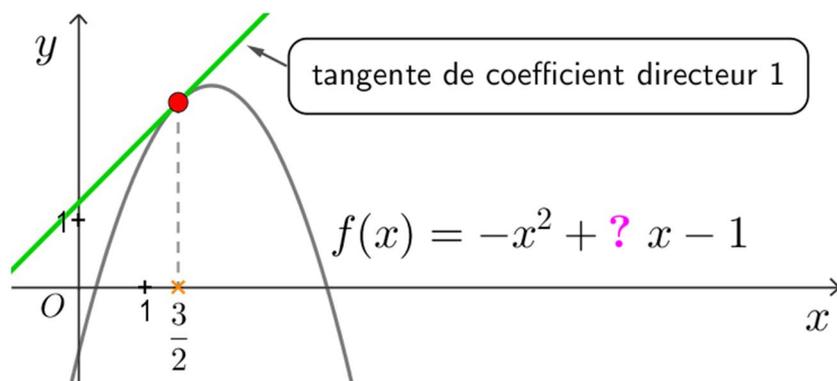
Vérification

1	$f(x) := (x-2)^2(x-3)(x-9/2) + 1$ $\rightarrow f(x) := (x-2)^2(x-3)\left(x - \frac{9}{2}\right)$
2	$f'(x) = 0$ Résoudre: $\left\{ x = 2, x = \frac{21}{8}, x = 4 \right\}$

Défi Dérivation 07

Pour tout réel x on pose : $f(x) = -x^2 + bx - 1$.

Déterminer la constante b sachant qu'au point d'abscisse $\frac{3}{2}$ la tangente à \mathcal{C}_f dans un repère donné du plan a pour coefficient directeur le nombre 1 :



Corrigé

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + bx - 1$ donc : $f'(x) = -2x + b$.

Au point d'abscisse $\frac{3}{2}$ la tangente à \mathcal{C}_f admet pour coefficient directeur 1 donc

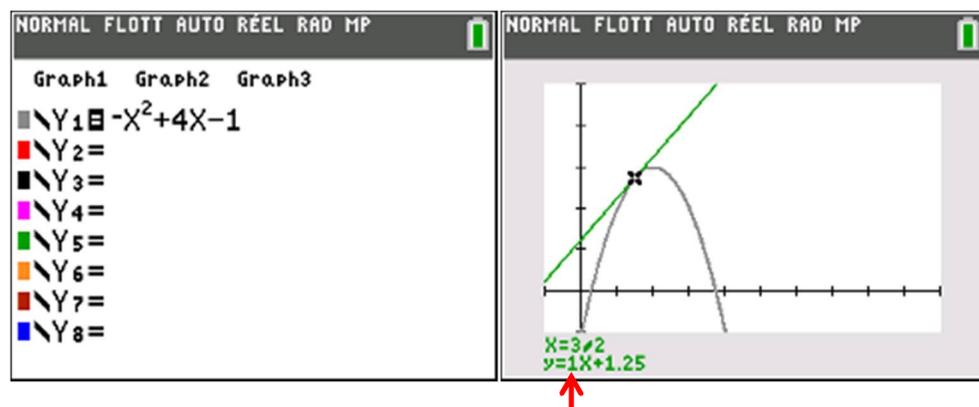
$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = 1$$

On obtient donc :

$$-2\left(\frac{3}{2}\right) + b = 1 \Leftrightarrow -3 + b = 1 \Leftrightarrow b = 1 + 3 \Leftrightarrow b = 4$$

Conclusion : $b = 4$.

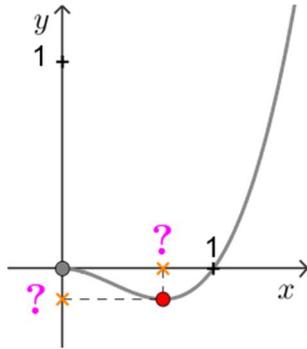
Vérification



Défi Dérivation 09

Pour tout $x \geq 0$, on pose : $f(x) = x^3 - x^2$.

Quelle est la valeur minimale de $f(x)$ sur $[0; +\infty[$ et pour quelle valeur de x est-elle atteinte ?



Corrigé

$\forall x \in [0; +\infty[, f(x) = x^3 - x^2$.

f est dérivable sur son ensemble de définition et pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x$$

$$f'(x) = x(3x - 2)$$

$$3x - 2 = 0 \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

Règle : « $ax + b$ est du signe de a à l'extérieur des racines ».

$$f(0) = 0^3 - 0^2 = 0$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3} - 1\right) = \frac{2^2}{3^2} \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{3}\right) = \frac{4}{9} \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{27}$$

On obtient finalement le tableau de variation :

x	0	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
x	0	+	+
$3x - 2$	-	0	+
$f'(x)$	0	-	+
Sens de variation de f	0	\searrow $-\frac{4}{27}$	\nearrow

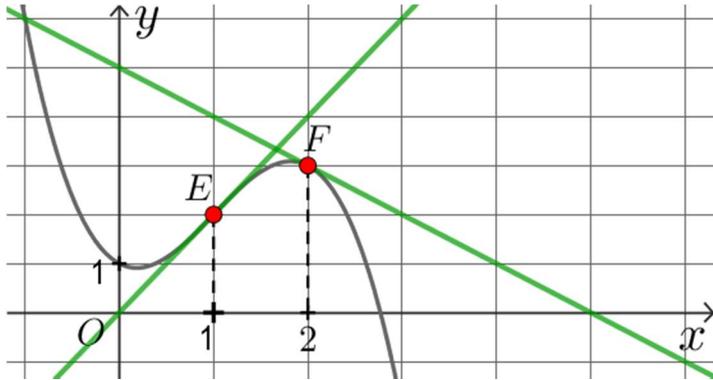
Le tableau de variation montre que la valeur minimale de $f(x)$ sur $[0; +\infty[$ est

$$-\frac{4}{27}, \text{ atteinte pour } x = \frac{2}{3}.$$

On peut aussi étudier le signe de $3x^2 - 2x$, c'est-à-dire de $f'(x)$, en tant qu'expression du second degré en rappelant la règle des signes valable pour une telle expression.

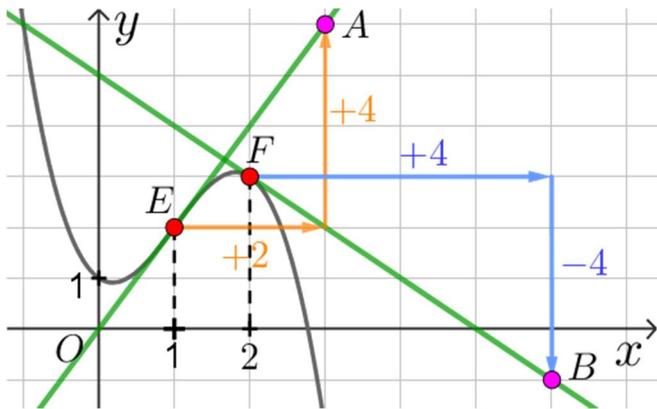
Défi Dérivation 10

Pour tout réel x on pose $f(x) = -x^3 + 3x^2 - x + 1$, E et F sont les points de \mathcal{C}_f d'abscisses respectives 1 et 2 : par lecture graphique déterminer l'équation réduite de la tangente à \mathcal{C}_f en E et de la tangente à \mathcal{C}_f en F puis vérifier à l'aide de $f'(x)$ et de la formule de la tangente.



Corrigé

- par lecture graphique



$A(3; 6)$ appartient à la tangente T_E à \mathcal{C}_f en E , on a :

$$f'(1) = \text{coeff directeur de la tangente en } E \\ = \frac{y_A - y_E}{x_A - x_E} = \frac{6 - 2}{3 - 1} = \frac{4}{2} = 2$$

autre rédaction

$$f'(1) = \text{coeff directeur de la tangente en } E \\ = \frac{\text{variation des ordonnées}}{\text{variation des abscisses}} = \frac{+4}{+2} = 2$$

D'autre part, cette tangente passe par l'origine du repère donc son ordonnée à l'origine est nulle.

L'équation réduite de T_E est donc : $y = 2x$.

$B(6; -1)$ appartient à la tangente T_F à \mathcal{C}_f en F , on a :

$$f'(2) = \text{coeff directeur de la tangente en } F \\ = \frac{y_B - y_F}{x_B - x_F} = \frac{-1 - 3}{6 - 2} = \frac{-4}{4} = -1$$

autre rédaction

$$f'(2) = \text{coeff directeur de la tangente en } F \\ = \frac{\text{variation des ordonnées}}{\text{variation des abscisses}} = \frac{-4}{+4} = -1$$

La tangente T_F admet pour équation :

$$y = f'(2)(x - 2) + f(2) \\ y = -1(x - 2) + 3 \\ y = -x + 2 + 3 \\ y = -x + 5$$

La tangente admet pour équation réduite : $y = -x + 5$.

(on peut aussi remarquer que T_F coupe l'axe des ordonnées à la valeur 5 donc l'ordonnée à l'origine de T_F est 5, d'où d'équation réduite $y = -x + 5$).

- en utilisant $f'(x)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -x^3 + 3x^2 - x + 1$

donc :

$$f'(x) = -3x^2 + 3 \times 2x - 1 \\ f'(x) = -3x^2 + 6x - 1$$

d'où : $f'(1) = -3(1)^2 + 6(1) - 1 = -3 + 6 - 1 = 2$

et $f'(2) = -3(2)^2 + 6(2) - 1 = -3 \times 4 + 12 - 1 = -1$.

Les équation réduites de T_E et T_F s'obtiennent ensuite comme précédemment.

Défi Dérivation 11

On pose, pour tout réel x :

$$f(x) = (x^2 - 7x + 10)^2 + 1$$

Calculer $f'(x)$, en étudier le signe puis dresser le tableau de variation de f sur \mathbb{R} .

Corrigé

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x^2 - 7x + 10)^2 + 1$$

rappel : $(u^2)' = 2u \times u'$

Posons : $u(x) = x^2 - 7x + 10$

On a : $u'(x) = 2x - 7$

Donc :

$$f'(x) = 2(x^2 - 7x + 10)(2x - 7) + 0$$

$$f'(x) = 2(x^2 - 7x + 10)(2x - 7)$$

$$f'(x) = (x^2 - 7x + 10)(4x - 14)$$

• étude de : $x^2 - 7x + 10$

$x^2 - 7x + 10$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1, b = -7, c = 10$, de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(1)(10) = 49 - 40 = 9$.

$\Delta > 0$ donc $x^2 - 7x + 10$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+7 - \sqrt{9}}{2(1)} = \frac{7 - 3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+7 + \sqrt{9}}{2(1)} = \frac{7 + 3}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Règle : « $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines ».

• étude de : $4x - 14$

$$4x - 14 = 0 \Leftrightarrow 4x = 14 \Leftrightarrow x = \frac{14}{4} \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$$

Règle : « $ax + b$ est du signe de a à droite de sa racine ».

• tableau de variation de f

$$f(2) = ((2)^2 - 7(2) + 10)^2 + 1 = (4 - 14 + 10)^2 + 1 = 0^2 + 1 = 1$$

$$f\left(\frac{7}{2}\right) = \left(\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{7}{2}\right) + 10\right)^2 + 1 = \frac{97}{16}$$

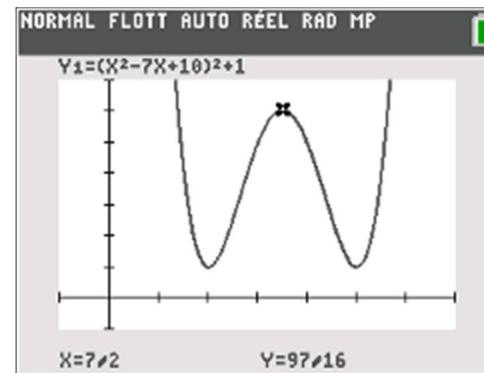
$$f(5) = ((5)^2 - 7(5) + 10)^2 + 1 = (25 - 35 + 10)^2 + 1 = 0^2 + 1 = 1$$

Le signe de $f'(x)$ donne le sens de variation de f .

On obtient finalement le tableau de variation :

x	$-\infty$	2	$\frac{7}{2}$	5	$+\infty$
$4x - 14$	-		-		+
$x^2 - 7x + 10$	+		-		+
$f'(x)$	-		+		+
Sens de variation de f	\searrow	1	\nearrow	$\frac{97}{16}$	\searrow
				1	\nearrow

Vérification



Défi Dérivation 12

On pose, pour tout réel x :

$$f(x) = (x^2 - 4x + 3)^3$$

- Calculer $f'(x)$, en étudier le signe puis dresser le tableau de variation de f sur \mathbb{R} .
- En déduire la valeur minimale de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et la(les) valeur(s) de x permettant de l'atteindre.

Corrigé

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x^2 - 4x + 3)^3$$

rappel : $(u^3)' = 3u^2 \times u'$

Posons : $u(x) = x^2 - 4x + 3$

On a : $u'(x) = 2x - 4$

Donc :

$$f'(x) = 3(x^2 - 4x + 3)^2(2x - 4)$$

$$f'(x) = (x^2 - 4x + 3)^2(6x - 12)$$

• étude de : $(x^2 - 4x + 3)^2$

$x^2 - 4x + 3$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = -4$, $c = 3$,

de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(3) = 16 - 12 = 4$.

$\Delta > 0$ donc $x^2 - 4x + 3$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+4 - \sqrt{4}}{2(1)} = \frac{4 - 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+4 + \sqrt{4}}{2(1)} = \frac{4 + 2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Un carré est toujours positif ou nul.

$(x^2 - 4x + 3)^2$ est toujours positif ou nul et s'annule pour $x = 1$ et pour $x = 3$.

• étude de : $6x - 12$

$$6x - 12 = 0 \Leftrightarrow 6x = 12 \Leftrightarrow x = \frac{12}{6} \Leftrightarrow x = 2$$

Règle : « $ax + b$ est du signe de a à droite de sa racine ».

• tableau de variation de f

$$f(1) = ((1)^2 - 4(1) + 3)^3 = (1 - 4 + 3)^3 = 0^3 = 0$$

$$f(2) = ((2)^2 - 4(2) + 3)^3 = (4 - 8 + 3)^3 = (-1)^3 = -1$$

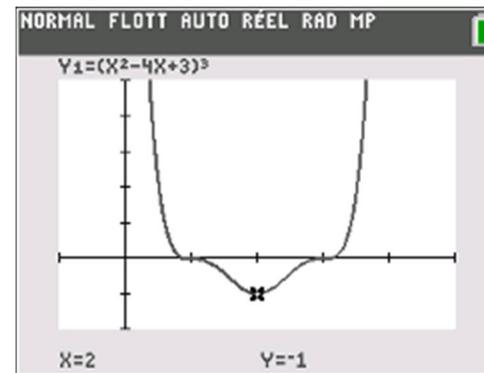
$$f(3) = ((3)^2 - 4(3) + 3)^3 = (9 - 12 + 3)^3 = 0^3 = 0$$

Le signe de $f'(x)$ donne le sens de variation de f .

On obtient finalement le tableau de variation :

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$6x - 12$	-		- 0 +		+
$(x^2 - 4x + 3)^2$	+	0	+	0	+
$f'(x)$	-	0	- 0 +	0	+
Sens de variation de f	\swarrow 0 \searrow -1 \nearrow 0 \nearrow				

Vérification



Défi Dérivation 13

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x^2 + ax - 7$, a constante.

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère donné du plan.

Déterminer a sachant que la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse (-1) est parallèle à la droite d'équation $y = 7x$.

Corrigé

La tangente au point d'abscisse (-1) est parallèle à la droite d'équation $y = 7x$.

Or, le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse (-1) est $f'(-1)$

et deux droites (non verticales) sont parallèles lorsqu'elles ont le même coefficient directeur,

donc : $f'(-1) = 7$.

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x^2 + ax - 7$.

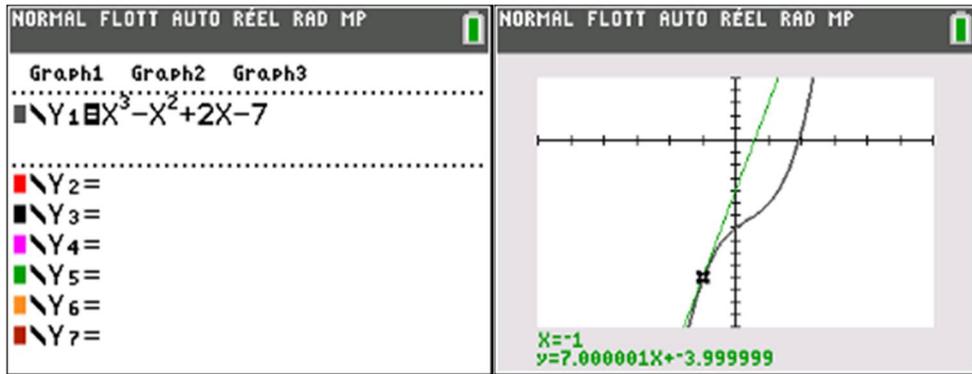
Donc : $f'(x) = 3x^2 - 2x + a$.

On a donc :

$$\begin{aligned} 3(-1)^2 - 2(-1) + a &= 7 \\ \Leftrightarrow 3 + 2 + a &= 7 \\ \Leftrightarrow a &= 7 - 3 - 2 \\ \Leftrightarrow a &= 2 \end{aligned}$$

Conclusion : $a = 2$.

Vérification



Défi Dérivation 14

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -x^3 + x^2 + ax + b$, a et b sont des constantes.

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère donné du plan.

Déterminer a et b sachant que la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 2 admet pour équation réduite $y = -7x + 16$.

Corrigé

La tangente au point d'abscisse 2 admet pour équation réduite $y = -7x + 16$.

Donc : $f(2) = -7(2) + 16 = -14 + 16 = 2$ et $f'(2) = -7$.

Pour tout réel x , $f(x) = -x^3 + x^2 + ax + b$.

Donc, on a d'une part :

$$f(2) = -(2)^3 + (2)^2 + a(2) + b = -8 + 4 + 2a + b = 2a + b - 4$$

et d'autre part on a :

$$f'(x) = -3x^2 + 2x + a$$

donc $f'(2) = -3(2)^2 + 2(2) + a = -12 + 4 + a = -8 + a$.

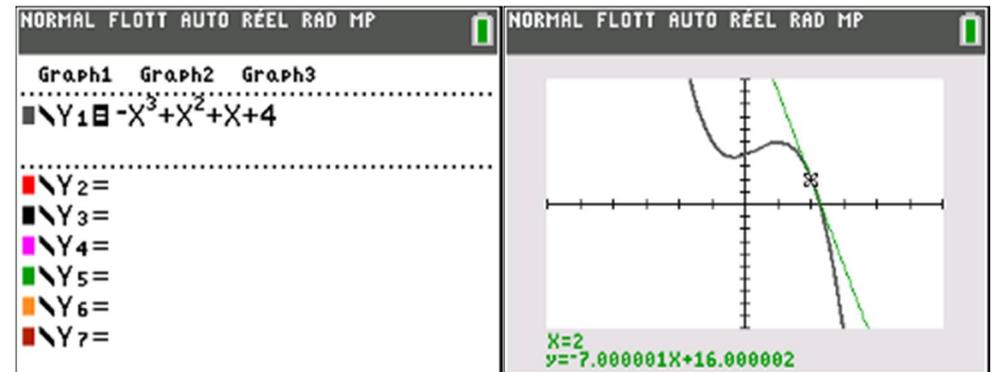
Il s'agit donc de résoudre le système d'équations : $\begin{cases} -8 + a = -7 \\ 2a + b - 4 = 2 \end{cases}$

La première équation donne : $a = -7 + 8 = 1$, puis en remplaçant dans la deuxième équation :

$$2(1) + b - 4 = 2 \Leftrightarrow 2 + b - 4 = 2 \Leftrightarrow b = 2 - 2 + 4 \Leftrightarrow b = 4$$

Conclusion : $a = 1$ et $b = 4$.

Vérification



Défi Dérivation 15

Pour tout réel x , on pose :

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 6x + 10}$$

- déterminer l'équation réduite de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 3
- étudier l'existence d'un minimum et d'un maximum de f sur \mathbb{R}

Corrigé

• tangente au point d'abscisse 3

On montrerait sans difficulté [non rédigé] que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{-2x^2 + 12x - 16}{(x^2 - 6x + 10)^2}$$

Une équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 3 s'écrit :

$$y = f'(3)(x - 3) + f(3)$$

Or,

$$f(3) = \frac{(3)^2 - 4(3) + 4}{(3)^2 - 6(3) + 10} = \frac{9 - 12 + 4}{9 - 18 + 10} = \frac{1}{1} = 1$$

$$f'(3) = \frac{-2(3)^2 + 12(3) - 16}{((3)^2 - 6(3) + 10)^2} = \frac{-2 \times 9 + 36 - 16}{1^2} = \frac{2}{1} = 2$$

On obtient :

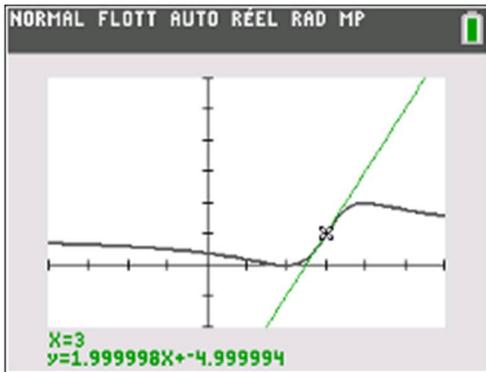
$$y = 2(x - 3) + 1$$

$$y = 2x - 6 + 1$$

$$y = 2x - 5$$

La tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 3 admet pour équation réduite : $y = 2x - 5$.

Vérification



• minimum et maximum de f sur \mathbb{R}

Le tableau de variation que l'on obtient en première, sans les limites de $f(x)$ en $-\infty$ et en $+\infty$ qui seront vues l'année prochaine, n'est d'aucune utilité...

En visualisant \mathcal{C}_f sur l'écran de la calculatrice on peut conjecturer que le minimum de f sur \mathbb{R} est zéro, atteint en 2 ($x = 2$) uniquement et que le maximum de f sur \mathbb{R} est 2, atteint en 4 ($x = 4$) uniquement.

On a d'une part, pour tout réel x :

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 6x + 10} = \frac{(x - 2)^2}{(x - 3)^2 + 1}$$

qui montre que $f(x)$ est toujours positif ou nul et s'annule lorsque son numérateur s'annule, c'est-à-dire lorsque $x = 2$ uniquement donc :

zéro est le minimum de f sur \mathbb{R} et il est atteint en 2 uniquement.

D'autre part, on a pour tout réel x :

$$\begin{aligned} 2 - f(x) &= 2 - \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 6x + 10} = \frac{2(x^2 - 6x + 10) - (x^2 - 4x + 4)}{x^2 - 6x + 10} \\ &= \frac{2(x^2 - 6x + 10) - (x^2 - 4x + 4)}{x^2 - 6x + 10} = \frac{2x^2 - 12x + 20 - x^2 + 4x - 4}{x^2 - 6x + 10} \\ &= \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 6x + 10} = \frac{(x - 4)^2}{(x - 3)^2 + 1} \end{aligned}$$

qui montre que $2 - f(x)$ est toujours positif ou nul, et que $2 - f(x) = 0$ lorsque $(x - 4)^2 = 0$ autrement dit lorsque $x = 4$.

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 2$ et on a : $f(x) = 2 \Leftrightarrow x = 4$ autrement dit : **2 est le maximum de f sur \mathbb{R} et il est atteint en 4 uniquement.**

Défi Dérivation 16

Pour tout réel x positif ou nul, on pose :

$$f(x) = ax - 1 + \frac{16}{x+1}$$

Déterminer a sachant qu'au point d'abscisse 3 la tangente à \mathcal{C}_f admet pour coefficient directeur 1.

Corrigé

$$f(x) = ax - 1 + \frac{16}{x+1}$$

$$\text{Rappel : } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - v' \times u}{v^2}$$

$$\begin{aligned} u(x) &= 16 & u'(x) &= 0 \\ v(x) &= x+1 & v'(x) &= 1 \end{aligned}$$

$$f'(x) = a + \frac{0(x+1) - 1(16)}{(x+1)^2}$$

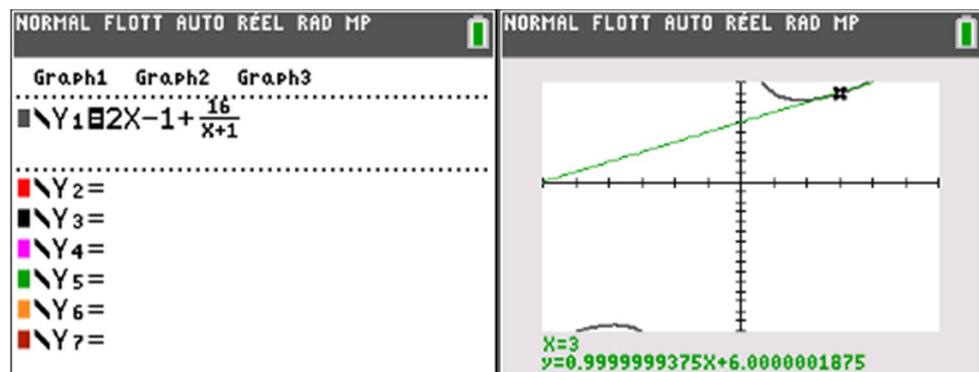
$$f'(x) = a - \frac{16}{(x+1)^2} \quad (*)$$

On sait qu'au point d'abscisse 3 la tangente à \mathcal{C}_f admet pour coefficient directeur 1, et que le coefficient directeur est égal au nombre dérivé, donc : $f'(3) = 1$. En utilisant (*) on obtient :

$$a - \frac{16}{(3+1)^2} = 1 \Leftrightarrow a - \frac{16}{16} = 1 \Leftrightarrow a = 2$$

On a donc : $a = 2$.

Vérification

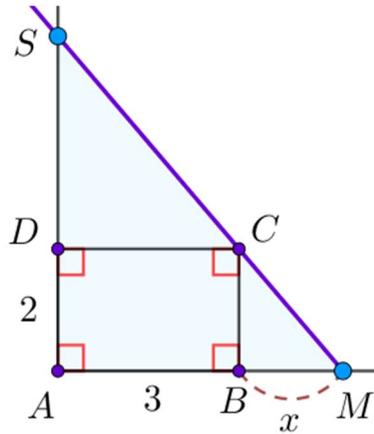


Défi Dérivation 17

Une unité de distance est choisie.

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 3$ et $AD = 2$, M un point variable de (AB) n'appartenant pas à la demi-droite $[BA)$. La demi-droite $[MC)$ coupe $[AD)$ en S .

On pose $BM = x$ et on note $f(x)$ l'aire du triangle AMS .



1. Montrer que, pour tout $x > 0$:

$$f(x) = \frac{(x+3)^2}{x}$$

2. Calculer $f'(x)$, en étudiant le signe, dresser le tableau de variation de f . En déduire l'aire minimale du triangle AMS et la valeur de x permettant de l'atteindre : que dire alors de la position relative des points A , B et M ?

Corrigé

1. Notons α la mesure commune en degré des angles \widehat{AMS} et \widehat{BMC} .

Dans le triangle AMS rectangle en A on a :

$$\tan \widehat{AMS} = \frac{AS}{AM} = \frac{AS}{3+x}$$

autrement dit :

$$\tan \alpha = \frac{AS}{x+3} \quad (*)$$

Dans le triangle BMC rectangle en B on a :

$$\tan \widehat{BMC} = \frac{BC}{BM} = \frac{2}{x}$$

autrement dit :

$$\tan \alpha = \frac{2}{x} \quad (**)$$

Il résulte de (*) et (**) que :

$$\frac{AS}{x+3} = \frac{2}{x}$$

autrement dit :

$$AS = \frac{2}{x}(x+3)$$

Autre méthode : on peut obtenir AS en montrant que $(BC) \parallel (AS)$ puis en appliquant le théorème de Thalès.

Le triangle AMS est rectangle en A donc :

$$\mathcal{A}_{AMS} = \frac{AM \times AS}{2}$$

donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{AMS} &= \frac{(3+x) \times \frac{2}{x}(x+3)}{2} = (x+3) \times \frac{2}{x} \times (x+3) \times \frac{1}{2} = \frac{2(x+3)^2}{2x} \\ &= \frac{(x+3)^2}{x} \end{aligned}$$

On a donc bien, pour tout $x > 0$:

$$f(x) = \frac{(x+3)^2}{x}$$

2. Remarquons que, pour tout $x > 0$:

$$f(x) = \frac{(x+3)^2}{x} = \frac{x^2 + 6x + 9}{x}$$

$$\text{Rappel : } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$u(x) = x^2 + 6x + 9 \quad u'(x) = 2x + 6$$

$$v(x) = x \quad v'(x) = 1$$

$$f'(x) = \frac{(2x+6)(x) - (1)(x^2 + 6x + 9)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 6x - x^2 - 6x - 9}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2}$$

Un carré est toujours positif ou nul donc le signe de $f'(x)$ est celui de son numérateur : $x^2 - 9$.

$$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \sqrt{9} \text{ ou } x = -\sqrt{9} \Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -3$$

Autre méthode

$$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x - 3^2 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+3 = 0 \text{ ou } x-3 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \text{ ou } x = 3$$

Rappel : « $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur de ses racines »

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$	
$x^2 - 9$	$+$	\emptyset	$-$	\emptyset	$+$

Le signe de $f'(x)$ donne le sens de variation de f .

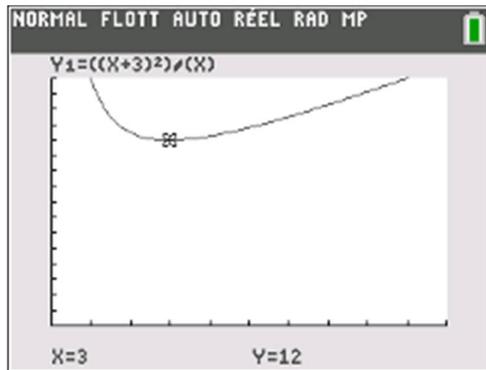
On en déduit le tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$:

x	0	3	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Sens de variation de f		↘ 12 ↗	

$$f(3) = \frac{(3+3)^2}{3} = \frac{6^2}{3} = \frac{36}{3} = 12$$

Le tableau de variation précédent montre que la valeur minimale de $f(x)$ est 12, atteinte pour $x = 3$ (uniquement) par conséquent l'aire minimale du triangle AMS est 12, atteinte pour $x = 3$ (uniquement) c'est-à-dire lorsque B est le milieu de $[AM]$.

Vérification

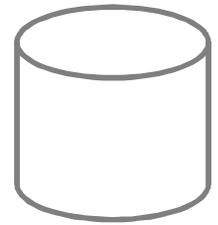


Défi Dérivation 18 Un grand classique

Une unité de distance est choisie.

Une boîte de conserve de forme cylindrique doit avoir un volume donné.

Démontrer que la quantité de métal nécessaire à sa fabrication est minimale lorsque sa hauteur est égale à son diamètre.



Corrigé

Notons V le volume donné, x le rayon de l'un des disques de base du cylindre et $h(x)$ sa hauteur.

Pour un cylindre de rayon R et de hauteur h on a : $\mathcal{V}_{\text{cylindre}} = \pi R^2 \times h$, donc : $V = \pi x^2 \times h(x)$, d'où :

$$h(x) = \frac{V}{\pi x^2}$$

Le patron habituel d'un cylindre de rayon R et de hauteur h est constitué de deux disques de rayon R et d'un rectangle de côtés $2\pi R$ et h .

On en déduit que la quantité de métal nécessaire à la fabrication de la boîte de conserve est :

$$f(x) = \pi x^2 \times 2 + 2\pi x \times h(x) = 2\pi x^2 + 2\pi x \times \frac{V}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + \frac{2V}{x}$$

$$\text{Rappel : } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$u(x) = 2V \quad u'(x) = 0$$

$$v(x) = x \quad v'(x) = 1$$

$$f'(x) = 2\pi \times 2x + \frac{0(x) - 1(2V)}{x^2}$$

$$f'(x) = 4\pi x - \frac{2V}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{4\pi x \times x^2}{x^2} - \frac{2V}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{4\pi x^3 - 2V}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2(2\pi x^3 - V)}{x^2}$$

Un carré est toujours positif ou nul donc le signe de $f'(x)$ est celui de son numérateur $2(2\pi x^3 - V)$, de plus comme $2 > 0$, on en déduit que $f'(x)$ est du signe de $g(x) = 2\pi x^3 - V$.

Rappelons que pour tout $a \in \mathbb{R}$ on note $\sqrt[3]{a}$ le nombre réel dont le cube est égal à a autrement dit : $(\sqrt[3]{a})^3 = a$.

Pour tout $x > 0$, on a :

$$g(x) = 2\pi x^3 - V = 2\pi \left(x^3 - \frac{V}{2\pi} \right) = 2\pi \left(x^3 - \left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \right)^3 \right) = 2\pi(x^3 - \alpha^3)$$

en posant : $\alpha = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Or, pour tous réels a et b :

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$$

donc : $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Par conséquent, pour tout $x > 0$: $g(x) = 2\pi(x - \alpha)(x^2 + \alpha x + \alpha^2)$.

Or, $x > 0$ et $\alpha > 0$ donc $\alpha x > 0$ puis $x^2 + \alpha x + \alpha^2 > 0$.

Comme $2\pi > 0$ et $x^2 + \alpha x + \alpha^2 > 0$ on en déduit que $g(x)$ est du signe de $(x - \alpha)$.

Règle : « $ax + b$ est du signe de a à droite de sa racine ».

Le signe de $f'(x)$ donne le sens de variation de f , donc le signe de $g(x)$ donne le sens de variation de f .

On a donc le tableau de variation :

x	0	α	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	\emptyset	+
Sens de variation de f			

On en déduit que $f(x)$ est minimale pour $x = \alpha$: la quantité de métal nécessaire à la construction de la boîte de conserve est minimale pour $x = \alpha$.

On a alors :

- d'une part : rayon de la boîte de conserve = α , donc : diamètre = 2α
- d'autre part :

$$h(\alpha) = \frac{V}{\pi \alpha^2} = \frac{V \times \alpha}{\pi \times \alpha^3} = \frac{V \times \alpha}{\pi \times \left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \right)^3} = \frac{V \times \alpha}{\pi \times \frac{V}{2\pi}} = \frac{V \times \alpha}{\frac{V \times \pi}{2\pi}} = \frac{V \times \alpha}{\frac{V}{2}} = V \times \alpha \times \frac{2}{V} = 2\alpha$$

On a : diamètre = 2α et hauteur = 2α par conséquent diamètre = hauteur.

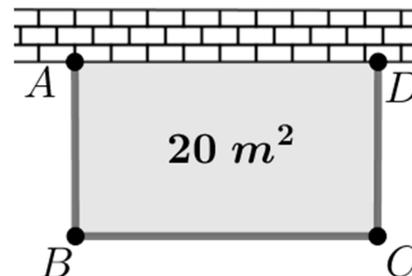
Conclusion

La quantité de métal nécessaire à la fabrication de la boîte cylindrique est minimale lorsque **sa hauteur est égale à son diamètre**.

Défi Dérivation 19 Un grand classique

Une unité de distance est choisie.

On veut construire, le long d'un mur, un potager d'aire 20 m^2 de forme rectangulaire puis le clôturer sur ses trois côtés restés libres :



Déterminer les dimensions exactes de ce potager pour que la longueur de clôture nécessaire soit minimale.

Corrigé

Posons $x = AB$ et $y = BC$.

On a : $x \times y = \text{aire du rectangle } ABCD = 20$, donc : $y = \frac{20}{x}$.

La longueur de la clôture est :

$$AB + BC + CD = x + \frac{20}{x} + x = 2x + \frac{20}{x}$$

Pour tout $x > 0$, on pose :

$$f(x) = 2x + \frac{20}{x} = \frac{2x^2}{x} + \frac{20}{x} = \frac{2x^2 + 20}{x}$$

• calcul de $f'(x)$

Rappel : $\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$$u(x) = 2x^2 + 20 \quad u'(x) = 4x$$

$$v(x) = x \quad v'(x) = 1$$

$$f'(x) = \frac{4x(x) - 1(2x^2 + 20)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^2 - 2x^2 - 20}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 20}{x^2}$$

Un carré est toujours positif ou nul donc le signe de $f'(x)$ est celui de son numérateur : $2x^2 - 20$.

Or, pour tout réel x :

$$2x^2 - 20 = 2(x^2 - 10) = 2(x^2 - (\sqrt{10})^2) = 2(x + \sqrt{10})(x - \sqrt{10})$$

Règle : « $ax + b$ est du signe de a à droite de sa racine ».

x	$-\infty$	$-\sqrt{10}$	$\sqrt{10}$	$+\infty$	
2	+	+	+	+	
$x + \sqrt{10}$	-	0	+	+	
$x - \sqrt{10}$	-	-	0	+	
$(x + 3)(2x - 6)$	+	0	-	0	+

Le signe de $f'(x)$ donne le sens de variation de f .

• **tableau de variation**

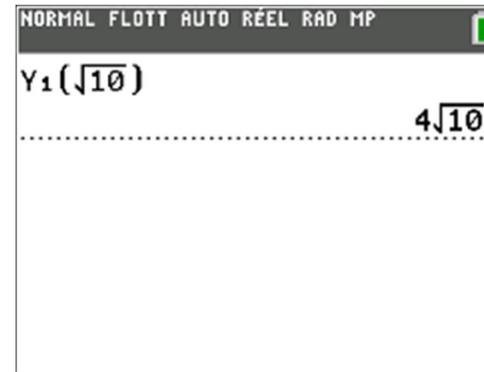
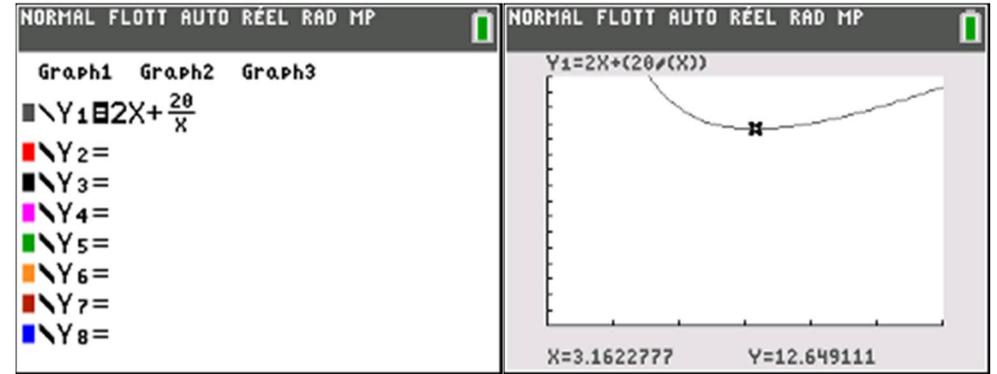
x	0	$\sqrt{10}$	$+\infty$
signe de $f'(x)$	-	0	+
sens de variation de f			

$$f(\sqrt{10}) = \frac{2(\sqrt{10})^2 + 20}{\sqrt{10}} = \frac{2 \times 10 + 20}{\sqrt{10}} = \frac{40 \times \sqrt{10}}{(\sqrt{10})^2} = \frac{40\sqrt{10}}{10} = 4\sqrt{10}$$

$$\text{si } x = \sqrt{10}, y = \frac{20}{\sqrt{10}} = \frac{20\sqrt{10}}{(\sqrt{10})^2} = \frac{20\sqrt{10}}{10} = 2\sqrt{10}$$

• **conclusion**

La longueur minimale de clôture est $4\sqrt{10}$ m, atteinte lorsque $AB = \sqrt{10}$ m et $BC = 2\sqrt{10}$ m.



Défi Dérivation 20

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

Calculer $f'(x)$, en étudier le signe, en déduire le tableau de variation de f .

Application

Soit a, b, c trois réels strictement positifs.

Comparer la moyenne de ces trois nombres et l'inverse de la moyenne de leurs inverses, autrement dit comparer :

$$E = \frac{a+b+c}{3} \text{ et } F = \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

Corrigé

$$\forall x > 0, f(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$\text{Rappel : } \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{-1}{x^2}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$$

Règle : « $ax + b$ est du signe de a à droite de sa racine ».

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x+1$	-	\emptyset	+	+
$x-1$	-	-	\emptyset	+
$(x+1)(x-1)$	+	\emptyset	-	+

Le signe de $f'(x)$ donne le sens de variation de f .

• tableau de variation

x	0	1	$+\infty$	
signe de $f'(x)$		-	\emptyset	+
sens de variation de f				

$$f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 1 + 1 = 2$$

Application

Soient a, b, c trois réels strictement positifs.

$$\begin{aligned} E - F &= \frac{a+b+c}{3} - \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \\ &= \frac{(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - 3(3)}{3 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} \\ &= \frac{\frac{a}{a} + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{b}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{c}{c} - 9}{3 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} \\ &= \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + 3 - 9}{3 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} \\ &= \frac{\frac{a}{b} + \frac{1}{b} + \frac{b}{c} + \frac{1}{c} + \frac{c}{a} + \frac{1}{a} - 6}{3 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} \\ &= \frac{f\left(\frac{a}{b}\right) + f\left(\frac{b}{c}\right) + f\left(\frac{c}{a}\right) - 6}{3 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} \end{aligned}$$

Or, a, b, c sont strictement positifs donc $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}$ et $\frac{c}{a}$ aussi.

Le tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$ montre que, pour tout $x \in]0; +\infty[$ on a $f(x) \geq 2$ par conséquent :

$$f\left(\frac{a}{b}\right) \geq 2, f\left(\frac{b}{c}\right) \geq 2 \text{ et } f\left(\frac{c}{a}\right) \geq 2$$

puis par somme :

$$f\left(\frac{a}{b}\right) + f\left(\frac{b}{c}\right) + f\left(\frac{c}{a}\right) \geq 2 + 2 + 2$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{a}{b}\right) + f\left(\frac{b}{c}\right) + f\left(\frac{c}{a}\right) \geq 6$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{a}{b}\right) + f\left(\frac{b}{c}\right) + f\left(\frac{c}{a}\right) - 6 \geq 6 - 6$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{a}{b}\right) + f\left(\frac{b}{c}\right) + f\left(\frac{c}{a}\right) - 6 \geq 0$$

Puis en divisant par $3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ qui est strictement positif :

$$\frac{f\left(\frac{a}{b}\right) + f\left(\frac{b}{c}\right) + f\left(\frac{c}{a}\right) - 6}{3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} \geq 0$$

autrement dit : $E - F \geq 0 \Leftrightarrow E - F + F \geq 0 + F \Leftrightarrow E \geq F$.

Conclusion

La moyenne de trois nombres strictement positifs est toujours supérieurs ou égale à l'inverse de la moyenne de leurs inverses.

Vérification

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP	
1 → A	1.
3 → B	3.
6 → C	6.
$\frac{A+B+C}{3} \geq \frac{1}{\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C}}$	1

Défi Dérivation 21

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 9x + 22}{x + 4}$$

- déterminer l'ensemble de définition de f
- calculer $f'(x)$, en étudier le signe puis dresser le tableau de variation de f
- déterminer l'équation réduite de la tangente T à C_f au point d'abscisse nulle

Corrigé

• \mathcal{D}_f

Il faut que le dénominateur $x + 4$ de $f(x)$ soit non nul :

$$x + 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -4$$

donc : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{-4\}$.

• $f'(x)$, signe de $f'(x)$, tableau de variation de f

$$f(x) = \frac{2x^2 + 9x + 22}{x + 4}$$

$$\text{Rappel : } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$u(x) = 2x^2 + 9x + 22 \quad u'(x) = 4x + 9$$

$$v(x) = x + 4 \quad v'(x) = 1$$

$$f'(x) = \frac{(4x + 9)(x + 4) - 1(2x^2 + 9x + 22)}{(x + 4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^2 + 16x + 9x + 36 - 2x^2 - 9x - 22}{(x + 4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 16x + 14}{(x + 4)^2}$$

Un carré est toujours positif ou nul donc le signe de $f'(x)$ est celui de son numérateur : $2x^2 + 16x + 14$.

$2x^2 + 16x + 14$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 2$, $b = 16$ et $c = 14$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (16)^2 - 4(2)(14) = 256 - 8 \times 14 = 256 - 112 = 144$$

$\Delta > 0$ donc $2x^2 + 16x + 14$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16 - \sqrt{144}}{2(2)} = \frac{-16 - 12}{4} = \frac{-28}{4} = -7$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16 + \sqrt{144}}{2(2)} = \frac{-16 + 12}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

Règle : « $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur de ses racines ».

Le signe de $f'(x)$ donne le sens de variation de f .

On obtient le tableau de variation :

x	$-\infty$	-7	-4	-1	$+\infty$			
signe de $f'(x)$	+	0	-	-	0	+		
Sens de variation de f		↗	-19	↘		↘	5	↗

$$f(-7) = \frac{2(-7)^2 + 9(-7) + 22}{-7 + 4} = \frac{2(49) - 63 + 22}{-3} = -19$$

$$f(-1) = \frac{2(-1)^2 + 9(-1) + 22}{-1 + 4} = \frac{2 - 9 + 22}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

• **équation réduite de la tangente T à \mathcal{C}_f au point d'abscisse nulle**

La tangente T admet pour équation : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.

$$f'(0) = \frac{2(0)^2 + 16(0) + 14}{(0 + 4)^2} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

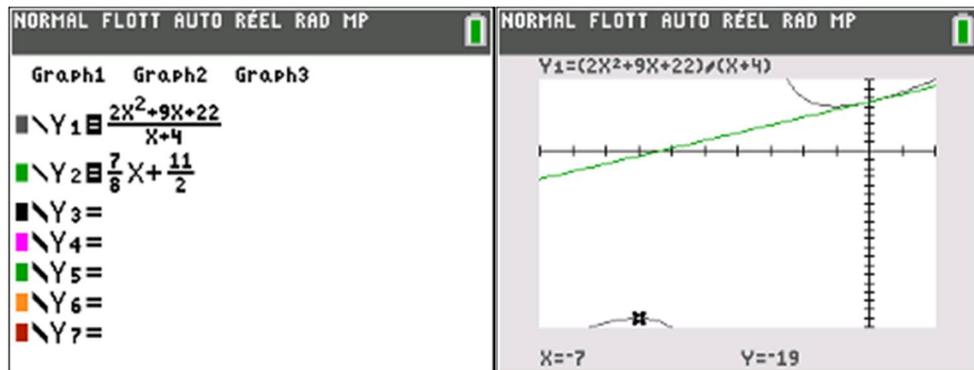
$$f(0) = \frac{2(0)^2 + 9(0) + 22}{0 + 4} = \frac{22}{4} = \frac{11}{2}$$

$$y = \frac{7}{8}(x - 0) + \frac{11}{2}$$

$$y = \frac{7}{8}x + \frac{11}{2}$$

La tangente T admet pour équation réduite : $y = \frac{7}{8}x + \frac{11}{2}$.

Vérification



Défi Dérivation 22

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 + \frac{1}{x-1}$$

et pour tout réel x , on pose : $g(x) = 2x^3 - 7x^2 + 8x - 4$.

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Calculer $g(2)$.
 - Factoriser $g(x)$ dans \mathbb{R} .
 - Dresser le tableau de signes de $g(x)$ sur \mathbb{R} .
- Calculer $f'(x)$ puis justifier que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.
- Dresser le tableau de variation de f .

Corrigé

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 + \frac{1}{x-1} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 2x^3 - 7x^2 + 8x - 4$$

1. ensemble de définition de f

Il faut que le dénominateur $x - 1$ de $f(x)$ soit non nul :

$$x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

2. a. Calcul de $g(2)$

$$g(2) = 2(2)^3 - 7(2)^2 + 8(2) - 4 = 2 \times 8 - 7 \times 4 + 16 - 4 = 16 - 28 + 16 - 4 = 32 - 32 = 0$$

Conclusion : $g(2) = 0$.

b. Une factorisation de $g(x)$ dans \mathbb{R}

g est une fonction polynôme de degré 3 et $g(2) = 0$ donc il existe trois constantes réelles a , b et c telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$$

En développant le membre de droite de cette égalité, on a voit :

– d'une part que le terme de plus haut degré est ax^3 , or le terme de plus haut degré de $2x^3 - 7x^2 + 8x - 4$ est $2x^3$, donc $a = 2$

– d'autre part que le terme constant est $(-2c)$, or le terme constant de $2x^3 - 7x^2 + 8x - 4$ donc : $-2c = -4$, soit $c = 2$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = (x - 2)(2x^2 + bx + 2)$.
 En développant le membre de droite de cette dernière égalité, on obtient pour terme en x : $(2 - 2b)x$, or le terme en x de $2x^3 - 7x^2 + 8x - 4$ est 8, donc $2 - 2b = 8$, $2b = -6$, $b = -3$
 Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = (x - 2)(2x^2 - 3x + 2)$.

c. Tableau de signes de $g(x)$ sur \mathbb{R}

• $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Règle : « $ax + b$ est du signe de a à droite de sa racine »

• $2x^2 - 3x + 2$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 2$, $b = -3$ et $c = 2$, de discriminant :
 $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(2)(2) = 9 - 16 = -7$
 $\Delta < 0$ donc $2x^2 - 3x + 2$ n'admet pas de racine réelle.

Règle (lorsque $\Delta < 0$) : « $ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de a et ne s'annule jamais ».

On en déduit que $2x^2 - 3x + 2$ est toujours strictement positif donc $g(x)$ est du signe de $(x - 2)$, d'où :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
Signe de $g(x)$	-	0	+

3. Calcul de $f'(x)$ et étude de son signe

$$\forall x \neq 1, f(x) = x^2 - 3x + 2 + \frac{1}{x-1}$$

f est somme d'une fonction polynôme, qui est dérivable sur \mathbb{R} , et d'une fonction rationnelle, donc elle est dérivable sur chacun des intervalles de son ensemble de définition.

Rappel : $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$

$$v(x) = x^2 - 3x + 2 \quad v'(x) = 2x - 3$$

$$f'(x) = 2x - 3 + \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(x-1)^2}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(x^2-2x+1) - 1}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 + 2x - 3x^2 + 6x - 3 - 1}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 7x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2}$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2x^3 - 7x^2 + 8x - 4 = g(x)$

Donc pour tout $x \neq 1$,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$$

Un carré est toujours positif ou nul donc le signe de $f'(x)$ est celui de son numérateur $g(x)$.

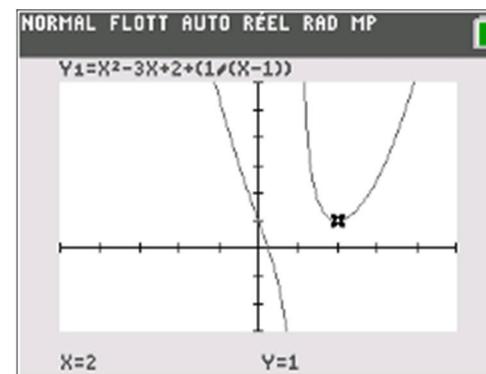
4. Tableau de variation

Le signe de $f'(x)$ donne le sens de variation de f .

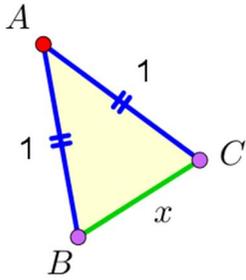
x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
signe de $f'(x)$	-	0	-	+
Sens de variation de f	↘		1	↗

$$f(2) = (2)^2 - 3(2) + 2 + \frac{1}{2-1} = 4 - 6 + 2 + \frac{1}{1} = 1$$

Vérification



Défi Dérivation 23



Une unité de distance est choisie.

On considère un triangle ABC isocèle en A tel que : $AB = AC = 1$, $BC = x$ où $x \in]0; 2[$.

Quelle est l'aire maximale du triangle ABC et pour quelle(s) valeur(s) de x est-elle atteinte ?

Que peut-on alors dire de la nature du triangle ABC ?

Corrigé

Notons I le milieu de $[BC]$. Le triangle ABC est isocèle en A donc la médiane issue du sommet principal A est aussi la hauteur issue de ce sommet, par conséquent $(AI) \perp (BC)$.

Le triangle ABI est rectangle en I donc d'après le théorème de Pythagore, on en déduit que : $AB^2 = AI^2 + IB^2$.

Or, $AB = 1$ et $IB = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}x$, donc :

$$1^2 = AI^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow AI^2 = 1 - \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow AI^2 = \frac{4}{4} - \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow AI^2 = \frac{4 - x^2}{4}$$

$$\text{Donc : } AI = \sqrt{\frac{4 - x^2}{4}} = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2}$$

$$\text{On a : } \mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times BC \times AI = \frac{1}{2} \times x \times \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2} = \frac{1}{4} \times x\sqrt{4 - x^2}$$

Posons, pour tout $x \in]0; 2[$, $f(x) = \frac{1}{4}x\sqrt{4 - x^2}$

Rappel : $(u \times v)' = u'v + v'u$ et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$$f'(x) = \frac{1}{4} \left(1 \times \sqrt{4 - x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} \times x \right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{4} \left(\sqrt{4 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} \right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{(\sqrt{4 - x^2})^2 - x^2}{\sqrt{4 - x^2}} \right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{4} \times \frac{4 - x^2 - x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{4} \times \frac{4 - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{4} \times \frac{2(2 - x^2)}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{((\sqrt{2})^2 - x^2)}{2\sqrt{4 - x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{2} + x)(\sqrt{2} - x)}{2\sqrt{4 - x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{(x + \sqrt{2})(-x + \sqrt{2})}{2\sqrt{4 - x^2}}$$

Pour tout $x \in]0; 2[$, $2\sqrt{4 - x^2} > 0$ et $x + \sqrt{2} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de : $-x + \sqrt{2}$. On a : $-x + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow -x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

Règle : « $ax + b$ est du signe de a à droite de sa racine ».

On obtient finalement le tableau de variation :

x	0	$\sqrt{2}$	2
Signe de $f'(x)$		0	
Sens de variation de f		\nearrow $\frac{1}{2}$ \searrow	

$$f(\sqrt{2}) = \frac{1}{4} \times \sqrt{2} \times \sqrt{4 - (\sqrt{2})^2} = \frac{1}{4} \times \sqrt{2} \times \sqrt{4 - 2} = \frac{1}{4} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = \frac{1}{4} (\sqrt{2})^2 = \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}$$

Si $x = \sqrt{2}$, alors $BC = \sqrt{2}$.

On a d'une part : $BC^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$,

et d'autre part : $BA^2 + AC^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$.

On constate que $BC^2 = BA^2 + AC^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore on en déduit que le triangle ABC est rectangle en A .

Conclusion

L'aire maximale du triangle ABC est $\frac{1}{2}$, atteinte pour $x = \sqrt{2}$ (uniquement), le triangle ABC est alors rectangle isocèle en A .